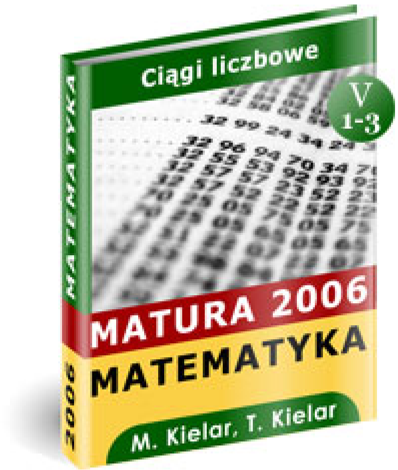
V. CIĄGI LICZBOWE

V.1-3. Ciągi liczbowe

Maria Kielar, Tomasz Kielar



ARDEO
ul. Konecznego 6/58, 31-216 Kraków
tel./fax (12) 416 31 74
e-mail: i.kielar@dobryebook.pl
WWW: www.Dobry**eBook**.pl

eBook

Spis treści pełnej wersji eBooka

1 Wstęp

Zdanie nowego egzaminu maturalnego z matematyki to marzenie każdego licealisty. Nie wystarczy chcieć zdać, ale trzeba jeszcze wiedzieć jaki materiał obowiązuje do egzaminu, w jakiej formie ma być przyswojony, a następnie wykorzystany na egzaminie.

Tematy zadań, odpowiedzi oraz przykładowe rozwiązania – to materiał, który proponujemy absolwentom szkół ponadgimnazjalnych (liceów ogólnokształcących i profilowanych) zdających egzamin maturalny w zakresie podstawowym lub rozszerzonym.

Matematyka może być przedmiotem wybranym przez zdającego jako:

- Obowiązkowy, zdawany na poziomie podstawowym (120 min – 11 zadań) lub rozszerzonym (150 min – 8 zadań). Wyboru dokonuje zdający w czasie egzaminu.
- Dodatkowy, zdawany tylko na poziomie rozszerzonym.

W czerwcu 2004 r. ukazał się *Informator maturalny od 2005 roku z matematyki* (ISBN 83-88564-35-8, Warszawa. Informator opracowała Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Krakowie w porozumieniu z pozostałymi komisjami okręgowymi oraz Centralną Komisją Egzaminacyjną w Warszawie.) w którym zostały umieszczone „standardy wymagań egzaminacyjnych”, czyli wykaz zagadnień wymaganych do matury.

Mając na uwadze jakie trudności mają nauczyciele i uczniowie z dobraniem odpowiednich zadań, w czasie nauki szkolnej, przygotowaliśmy odpowiedni zbiór zadań, którego struktura i plan poszczególnych działów uwzględniają standardy wymagań.

Autorami zbioru są: Maria Kielar – absolwentka Wydziału Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, nauczycielka matematyki z 30 letnim stażem pracy w szkole ponadpodstawowej i Tomasz Kielar – absolwent Wydziału Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego. Od początku swojej aktywności zawodowej pracuje w jednym z krakowskich liceów, egzaminator OKE. Połączenie dużego doświadczenia z aktualnymi potrzebami na bazie dobrych podstaw teoretycznych owocuje materiałem bardzo praktycznym.

Zestaw pytań jest bardzo dobrze dobrany do obowiązującego programu, a bardzo dużą zaletą zbioru jest to, że posiada on zestaw rozwiązań przykładowych, które ułatwią rozwiązywanie proponowanych zadań.

Cały materiał podzielony jest na XI działów:
I. Liczby i ich zbiory, II. Funkcje i ich własności, III. Wielomiany i funkcje wymierne, IV. Funkcje trygonometryczne, V. Ciągi liczbowe, VI. Planimetria, VII. Geometria analityczna, VIII. Stereometria, IX. Rachunek prawdopodobieństwa, X. Funkcje wykładnicze i logarytmiczne, XI. Ciągłość i pochodna funkcji.

Proponowany eBook obejmuje obszerną część działu *V. Ciągi liczbowe,* którego materiał **wymagany jest na egzaminie**.

2 V.1. Definicja i przykłady ciągów liczbowych — poziom podstawowy

a. określać ciąg wzorem ogólnym,
b. wyznaczać wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym,
c. sporządzać wykres danego ciągu,
d. podawać własności ciągu na podstawie jego wykresu.

✶ zadanie z rozwiązaniem

1.6. Oblicz pięć początkowych wyrazów oraz wyraz dziesiąty ciągu o wyrazie ogólnym a_n jeśli:

a) $a_n = 2n - 1$,
b) $a_n = \frac{2}{n+1}$,
c) $a_n = 2 - 3n$,
d) $a_n = \frac{n}{2^n}$,
e) $a_n = n^2 - 2n + 1$,
f) $a_n = \frac{2n-3}{n+5}$,
g) $a_n = \sqrt{2n-1}$,
h) $a_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$,
i) $a_n = (-1)^{n+1}$,
j) $a_n = \frac{1}{2}n + 2$,
k) $\sin n\pi$,
l) $\cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi$,
m) $\sin\frac{n\pi}{4}$,
n) $\cos\frac{n\pi}{6}$. ✶

[...]

Cały rozdział dostępny jest w pełnej wersji eBooka
V. Ciągi liczbowe

3 V.2. Ciąg arytmetyczny i geometryczny. Wzór na *n*-ty wyraz. Wzór na sumę *n* początkowych wyrazów

a. badać czy ciąg jest arytmetyczny (geometryczny),
b. wyznaczać ciąg arytmetyczny (geometryczny) na podstawie wskazanych danych,
c. obliczyć sumę *n* kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego (geometrycznego),
d. stosować własności ciągu arytmetycznego (geometrycznego) w zadaniach (także tekstowych).

✶ zadanie z rozwiązaniem

2.64. Oblicz n, jeśli (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q:

a) $a_1 = \frac{1}{2},\ a_n = \frac{1}{54},\ q = \frac{1}{3}$, b) $a_1 = -1,\ a_n = \frac{1}{32},\ q = -\frac{1}{2}$, c) $a_2 = -\frac{2}{3},\ q = \frac{1}{3},\ a_n = -\frac{2}{81}$,

d) $a_1 = -10,\ a_2 = -5,\ a_n = -\frac{5}{16}$, e) $a_2 = 4,\ q = \frac{1}{4},\ a_n = \frac{1}{16}$, f) $a_1 = \frac{1}{4},\ q = 2,\ S_n = \frac{31}{4}$,

g) $a_2 = 10,\ q = \frac{1}{2},\ S_n = 37\frac{1}{2}$, h) $a_1 = 3,\ a_4 = 24,\ S_n = 93$, i) $a_2 = 3,\ a_5 = \frac{3}{8},\ S_n = \frac{93}{8}$,

j) $a_3 = 9,\ q = \sqrt{3},\ S_n = 12\left(\sqrt{3}+1\right)$. ✶

[...]

Cały rozdział dostępny jest w pełnej wersji eBooka
V. Ciągi liczbowe

4 V.3. Procent składany. Oprocentowanie lokat i kredytów

a. stosować procent składany w zadaniach również dotyczących oprocentowania lokat i kredytów.

✶ zadanie z rozwiązaniem

3.2. Przy stałej stopie procentowej p% kapitał początkowy K_0 zł po n latach, jeśli odsetki dopisywane są raz w roku, wynosi $K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ zł. Do jakiej sumy wzrośnie lokata 5000 zł, przy oprocentowaniu 8% w stosunku rocznym, jeśli odsetki dopisywane są raz w roku:

a) po 2 latach, b) po 4 latach, c) po 5 latach, d) po 10 latach? ✶

Rozpatrz dwa przypadki:
I. odsetki nie są opodatkowane,
II. bank odprowadza 20% podatku od odsetek.

[...]

Cały rozdział dostępny jest w pełnej wersji eBooka
V. Ciągi liczbowe

5 V.1. Odpowiedzi z przykładowymi rozwiązaniami

1.6.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_{10}		a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_{10}
a)	1	3	5	7	9	19	h)	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{27}$	$\frac{1}{81}$	$-\frac{1}{243}$	$\frac{1}{3^{10}}$
b)	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{11}$	i)	1	-1	1	-1	1	-1
c)	-1	-4	-7	-10	-13	-28	j)	$2\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{2}$	4	$4\frac{1}{2}$	7
d)	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{2^{10}}=\frac{5}{512}$	k)	0	0	0	0	0	0
e)	0	1	4	9	6	81	l)	0	0	0	0	0	0
f)	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{17}{15}$	m)	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
g)	1	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{7}$	3	$\sqrt{19}$	n)	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Rozwiązanie

n) Oblicz pięć początkowych wyrazów oraz wyraz dziesiąty ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = \cos\frac{n\pi}{6}$.

$$a_1 = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},\quad a_2 = \cos\frac{2\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},\quad a_3 = \cos\frac{3\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{2} = 0,$$

$$a_4 = \cos\frac{4\pi}{6} = \cos\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2},\quad a_5 = \cos\frac{5\pi}{6} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$a_{10} = \cos\frac{10\pi}{6} = \cos\frac{5\pi}{3} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

Odpowiedź

Pięć początkowych wyrazów danego ciągu to liczby $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$, a wyraz dziesiąty ma wartość $a_{10} = \frac{1}{2}$.

[...]

Cały rozdział dostępny jest w pełnej wersji eBooka

V. Ciągi liczbowe

6 V.2. Odpowiedzi z przykładowymi rozwiązaniami

2.64.

a) $n=4$, b) $n=6$, c) $n=5$, d) $n=6$, e) $n=5$,
f) $n=5$, g) $n=4$, h) $n=5$, i) $n=5$, j) $n=4$.

Rozwiązanie

j) Oblicz *n*, jeśli (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie *q*, jeśli:
$a_3=9,\ q=\sqrt{3},\ S_n=12\left(\sqrt{3}+1\right)$.

Korzystam ze wzorów na ogólny wyraz ciągu geometrycznego $a_n=a_1\cdot q^{n-1}$ i sumę *n* początkowych wyrazów ciągu $S_n=a_1\cdot\frac{q^n-1}{q-1}$. Po wstawieniu danych otrzymuję układ równań:

$$\begin{cases} q=\sqrt{3}\\ a_3=9\\ S_n=12\left(\sqrt{3}+1\right)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q=\sqrt{3}\\ a_1\cdot q^2=9\\ a_1\cdot\frac{\left(\sqrt{3}\right)^n-1}{\sqrt{3}-1}=12\left(\sqrt{3}+1\right)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q=\sqrt{3}\\ 3a_1=9\\ 3\cdot\frac{\left(\sqrt{3}\right)^n-1}{\sqrt{3}-1}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}=12\left(\sqrt{3}+1\right)\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} q=\sqrt{3}\\ a_1=3\\ \frac{\left(\sqrt{3}\right)^n-1}{2}=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q=\sqrt{3}\\ a_1=3\\ \left(\sqrt{3}\right)^n-1=8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q=\sqrt{3}\\ a_1=3\\ \left(\sqrt{3}\right)^n=9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q=\sqrt{3}\\ a_1=3\\ \left(\sqrt{3}\right)^n=\left(\sqrt{3}\right)^4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q=\sqrt{3}\\ a_1=3\\ n=4\end{cases}$$

Odpowiedź
Szukana wartość *n* wynosi $n=4$.

[...]

Cały rozdział dostępny jest w pełnej wersji eBooka
V. Ciągi liczbowe

7 V.3. Odpowiedzi z przykładowymi rozwiązaniami

3.2. I. Odsetki nie są opodatkowane: a) 5 832 zł, b) 6 802,44 zł, c) 7 346,64 zł, d) 10 794,62 zł.
II.Bank odprowadza 20% podatku od odsetek: a) 5 660,48 zł, b) 6 408,21 zł, c) 6 818,33 zł, d) 9 297,93 zł

Rozwiązanie

d) Do jakiej sumy wzrośnie lokata 5 000 zł, przy oprocentowaniu 8% w stosunku rocznym, po 10 latach, jeśli odsetki dopisywane są raz w roku, gdy: I – odsetki nie są oprocentowane, II – od odsetek odprowadzany jest podatek w wysokości 20%.

I. Korzystam ze wzoru na kapitał wraz z odsetkami przy rocznej kapitalizacji odsetek:

$$K_n = K_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n \quad \text{gdzie } K_0 = 5000,\ \ p = 8\%,\ \ n = 10\,lat$$

$$K_{10} = 5\,000\left(1+\frac{8}{100}\right)^{10} = 10\,794{,}62 \ \text{(z dokładnością do 1 grosza),}$$

II. Wzór na kapitał, wraz z odsetkami pomniejszonymi o 20% podatek, przy rocznej kapitalizacji odsetek: $K_n = K_0\left(1+\frac{80}{100}\cdot\frac{p}{100}\right)^n \Rightarrow K_n = K_0\left(1+0{,}8\frac{p}{100}\right)^n$.

Podstawiam do wzoru $K_0 = 5\,000\,zł,\ \ p = 8\%,\ \ n = 10\,lat$

$$K_{10} = 5000\cdot\left(1+0{,}8\frac{8}{100}\right)^n = 9\,297{,}93\,zł \ \text{(z dokładnością do 1 gr).}$$

Odpowiedź

Lokata w wysokości 5 000 zł po 10 latach przy oprocentowaniu 8% w stosunku rocznym i rocznej kapitalizacji odsetek wzrośnie do kwoty 10 794,62 zł bez odliczania podatku i będzie wynosić 9 297,93 zł po odliczeniu podatku od odsetek.

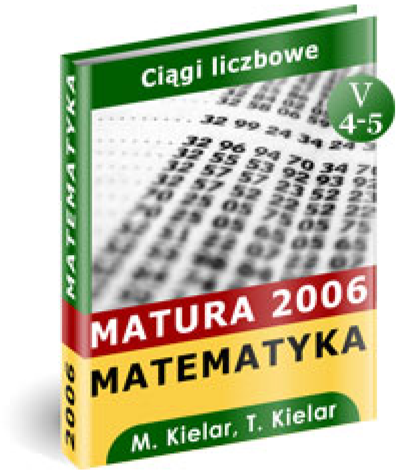
[...]

Cały rozdział dostępny jest w pełnej wersji eBooka
V. Ciągi liczbowe

V. CIĄGI LICZBOWE

V.4-5. Ciągi liczbowe

Maria Kielar, Tomasz Kielar



eBook

Spis treści pełnej wersji eBooka

2 V.4. Przykłady ciągów zdefiniowanych rekurencyjnie — poziom rozszerzony

a. określać ciąg wzorem rekurencyjnym,
b. na podstawie określenia rekurencyjnego ciągu podawać wzór na *n*-ty wyraz tego ciągu.

✶ zadanie z rozwiązaniem

4.3. Odgadnij wzór na ogólny wyraz ciągu określonego wzorem rekurencyjnym:

a) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 2, \end{cases}$ b) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 3a_n, \end{cases}$ c) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = -a_n + 2, \end{cases}$

d) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}, \end{cases}$ e) $\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_{n+1} = -2a_n, \end{cases}$ f) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \sqrt{2}a_n, \end{cases}$

g) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 2n + 3, \end{cases}$ h) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 3, \end{cases}$ i) $\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = a_n + 2n, \end{cases}$

j) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 4n + 2. \end{cases}$ ✶

[...]

Cały rozdział dostępny jest w pełnej wersji eBooka
V. Ciągi liczbowe

3 V.5. Pojęcie granicy ciągu. Obliczanie granic niektórych ciągów. Suma szeregu geometrycznego — poziom rozszerzony

a. podawać przykłady ciągów: zbieżnego, rozbieżnego,
b. stosować twierdzenia o granicy sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów zbieżnych do obliczania granic ciągów,
c. badać warunek istnienia sumy szeregu geometrycznego,
d. obliczać sumę szeregu geometrycznego,
e. zamieniać ułamek okresowy na zwykły, stosować w zadaniach wzór na sumę szeregu geometrycznego,
f. stosować w zadaniach wzór na sumę szeregu geometrycznego.

✶ zadanie z rozwiązaniem

5.45. Wyznacz dziedzinę i rozwiąż równanie:

a) $\frac{x-1}{x}+\left(\frac{x-1}{x}\right)^2+\left(\frac{x-1}{x}\right)^3+\ldots=\frac{2}{x-2}$,

b) $1+2x+4x^2+8x^3+\ldots=\frac{1}{1-2x}$,

c) $1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\ldots=\frac{1}{4}$,

d) $2+x+\frac{x^2}{2}+\ldots=\frac{3-x}{3}$,

e) $1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\ldots=2$,

f) $1+\frac{x}{x+1}+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2+\ldots=\frac{5}{9(1-x)}$,

g) $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+1)^3}+\ldots=\frac{x-2}{3}$,

h) $x-2x^2+4x^3-8x^4+\ldots=\frac{x}{1-2x}$,

i) $1+\frac{1}{1-x}+\frac{1}{(1-x)^2}+\ldots=1-x$,

j) $1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}-\frac{8}{x^3}+\ldots=\frac{6}{x+5}$,

k) $x^2+2x^3+4x^4+\ldots=\frac{1}{3}$,

l) $1+\frac{4}{3x}+\frac{16}{9x^2}+\frac{64}{27x^3}+\ldots=\frac{-3}{x}$,

m) $\frac{x^2-3}{2}+\left(\frac{x^2-3}{2}\right)^2+\left(\frac{x^2-3}{2}\right)^3+\ldots=x-1$,

n) $x-\frac{1}{2x}+\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4x}+\frac{x^3}{4}-\frac{1}{8x}+\ldots=1$,

o) $\sqrt{x^2+2x+1}+\frac{1}{2}\sqrt{x^2+2x+1}+\frac{1}{4}\sqrt{x^2+2x+1}+\ldots=2$,

p) $\frac{1}{1-x}+\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{(1-x)^3}\ldots=-2x+1$.✶

[...]

Cały rozdział dostępny jest w pełnej wersji eBooka

V. Ciągi liczbowe

4 V.4. Odpowiedzi z przykładowymi rozwiązaniami

4.3.

a) $a_n = 2n - 1$, b) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$, c) $a_n = (-1)^{n-1} + 1$,

d) $a_n = 1$, e) $a_n = (-2)^n$, f) $a_n = \left(\sqrt{2}\right)^{n+1}$,

g) $a_n = (n+1)^2 - 3$, h) $a_n = 3n - 2$, i) $a_n = n(n-1)$,

j) $a_n = 2n^2 - 1$.

Rozwiązanie

j) Odgadnij wzór na ogólny wyraz ciągu określonego wzorem rekurencyjnym:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 4n + 2 \end{cases}.$$

Aby odgadnąć wzór na ogólny wyraz ciągu, wyznaczam kilka początkowych wyrazów:

$a_1 = 1$

$a_2 = 1 + 4 \cdot 1 + 2$

$a_3 = 1 + 4 \cdot 1 + 2 + 4 \cdot 2 + 2$

$a_4 = 1 + 4 \cdot 1 + 2 + 4 \cdot 2 + 2 + 4 \cdot 3 + 2$

$a_n = 1 + 2 \cdot (n-1) + 4 \cdot (1 + 2 + 3 + ... + (n-1))$.

Po zastosowaniu wzoru na sumę $n-1$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

$$S_{n-1} = \frac{a_1 + a_{n-1}}{2} \cdot (n-1)$$

$$4 \cdot (1 + 2 + 3 + ... + (n-1)) = 4 \cdot \frac{(1 + n - 1)(n-1)}{2} = 2n(n-1) = 2n^2 - 2n$$

$a_n = 1 + 2n - 2 + 2n^2 - 2n = 2n^2 - 1$.

Sprawdzam poprawność otrzymanego wzoru:

$a_1 = 1$

$a_{n+1} = 2(n+1)^2 - 1 = 2(n^2 + 2n + 1) - 1 = 2n^2 + 4n + 2 - 1 = 2n^2 + 4n + 1$

$a_{n+1} - a_n = 2n^2 + 4n + 1 - 2n^2 + 1 = 4n + 2 \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n + 4n + 2$.

Odpowiedź

Ogólny wyraz ciągu określonego wzorem rekurencyjnym $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 4n + 2 \end{cases}$ wyraża się wzorem

$a_n = 2n^2 - 1$.

5 V.5. Odpowiedzi z przykładowymi rozwiązaniami

5.45.

a) $D_r = \left(\frac{1}{2};+\infty\right),\ x \in \{3\}$,

b) $D_r = \left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right),\ x \in \left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$,

c) $D_r = (-\infty;-1) \cup (1;+\infty),\ x \in \phi$,

d) $D_r = (-2;2),\ x \in \{-1\}$,

e) $D_r = (-\infty;-1) \cup (1;+\infty),\ x \in \left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}$,

f) $D_r = \left(-\frac{1}{2};+\infty\right),\ x \in \left\{\frac{2}{3}\right\}$,

g) $D_r = (-\infty;-2) \cup (0;+\infty),\ x \in \{3\}$,

h) $D_r = \left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right),\ x \in \{0\}$,

i) $D_r = (-\infty;0) \cup (2;+\infty),\ x \in \{-1\}$,

j) $D_r = (-\infty;-2) \cup (2;+\infty),\ x \in \{-3;4\}$,

k) $D_r = \left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right),\ x \in \left\{\frac{1}{3}\right\}$,

l) $D_r = \left(-\infty;-\frac{4}{3}\right) \cup \left(\frac{4}{3};+\infty\right),\ x \in \{-4\}$,

m) $D_r = \left(-\sqrt{5};-1\right) \cup \left(1;\sqrt{5}\right),\ x \in \{2\}$,

n) $D_r = (-2;2),\ x \in \left\{-\frac{2}{3};1\right\}$,

o) $D_r = R,\ x \in \{0;-2\}$,

p) $D_r = (-\infty;0) \cup (2;+\infty),\ x \in \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

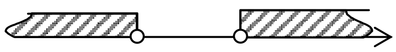
Rozwiązanie

p) Wyznacz dziedzinę i rozwiąż równanie: $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1-x)^2} + \ldots = -2x+1$.

Lewa strona równania jest sumą nieskończonego ciągu zbieżnego, w którym $a_1 = \frac{1}{1-x},\ q = \frac{1}{1-x}$.

Wyznaczam warunek zbieżności ciągu:

$$|q| < 1 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{1-x}\right| < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{|1-x|} < 1 \Leftrightarrow |1-x| > 1 \Leftrightarrow (1-x > 1 \vee 1-x < -1) \Leftrightarrow x < 0 \vee x > 2$$



$|q| < 1\ \ dla\ \ x \in (-\infty;0) \cup (2;+\infty)$

Dziedziną równania jest zbiór $D_r = (-\infty;0) \cup (2;+\infty)$.

Wyznaczam sumę ciągu, która jest lewą stroną równania: $S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{1-x}}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{1}{1-x-1} = \frac{-1}{x}$.

Równanie ma więc postać: $-\frac{1}{x} = -2x+1 \Leftrightarrow 1 = 2x^2 - x \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0$.

Rozwiązuję otrzymane równanie kwadratowe w wyznaczonym zbiorze D_r:

$2x^2 - x - 1 = 0,\quad a = 2,\ b = -1,\ c = -1,\quad \Delta = b^2 - 4ac = 1 + 8 = 9,\quad \sqrt{\Delta} = 3$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2} \in D_r \;\vee\; x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+3}{4} = 1 \notin D_r .$$

Odpowiedź

Dziedziną danego równania jest zbiór $D_r = (-\infty;0) \cup (2;+\infty)$.

Równanie ma jedno rozwiązanie $x = -\frac{1}{2}$.

[...]

Cały rozdział dostępny jest w pełnej wersji eBooka
V. Ciągi liczbowe

Jeśli zainteresował Cię darmowy fragment, przeczytaj informacje o pełnej wersji eBooka
V. Ciągi liczbowe